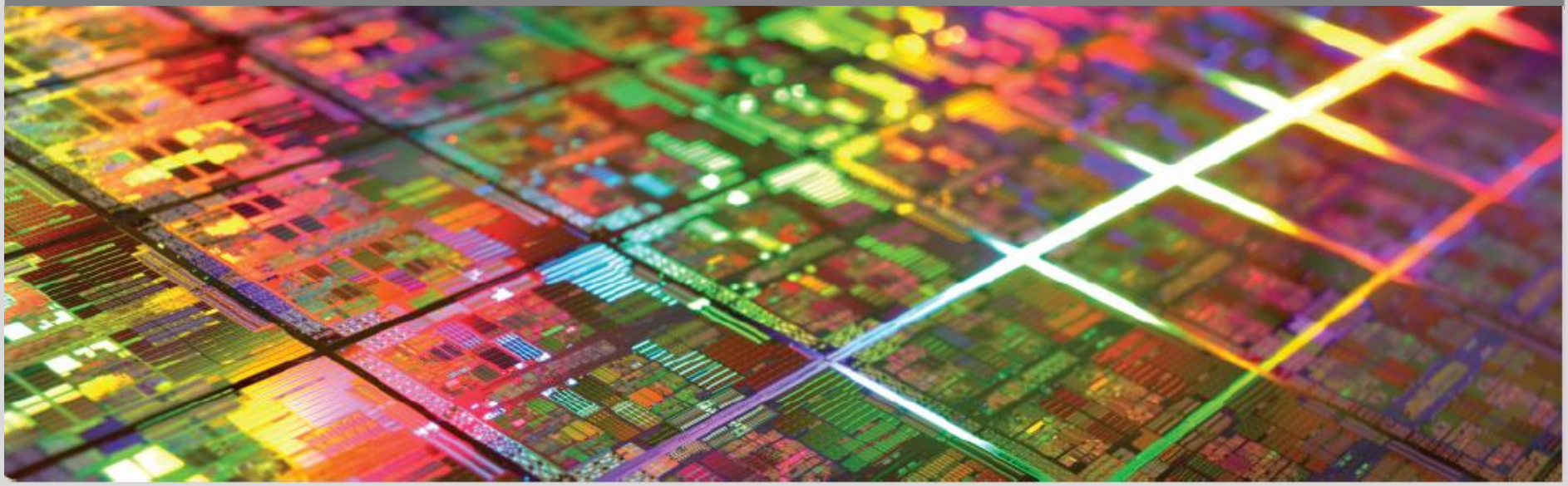
Karlsruher Institut für Technologie

Rechnerstrukturen

Vorlesung im Sommersemester 2015
Prof. Dr. Wolfgang Karl

Fakultät für Informatik – Lehrstuhl für Rechnerarchitektur und Parallelverarbeitung



Vorlesung Rechnerstrukturen

Kapitel 1: Grundlagen

- 1.1 Einführung, Begriffsklärung
- 1.2 Entwurf von Rechenanlagen – Entwurfsfragen
- 1.3 Einführung in den Entwurf eingebetteter Systeme
- 1.4 Energieeffizienter Entwurf – Grundlagen
- 1.5 Bewertung der Leistungsfähigkeit eines Rechners
- 1.6 Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Begriffsbildung

- **Zuverlässigkeit (dependability)**
  - bezeichnet die Fähigkeit eines Systems, während einer vorgegebenen Zeitdauer bei zulässigen Betriebsbedingungen die spezifizierte Funktion zu erbringen.
  - Ziel

- **Fehlertoleranz (fault tolerance)**
  - bezeichnet die Fähigkeit eines Systems, auch mit einer begrenzten Anzahl fehlerhafter Subsysteme die spezifizierte Funktion (bzw. den geforderten Dienst) zu erbringen.
  - Technik

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Begriffsbildung

- **Sicherheit (safety)**
  - bezeichnet das Nichtvorhandensein einer Gefahr für Menschen oder Sachwerte. Unter einer Gefahr ist ein Zustand zu verstehen, in dem (unter anzunehmenden Betriebsbedingungen) ein Schaden zwangsläufig oder zufällig entstehen kann, ohne dass ausreichende Gegenmaßnahmen gewährleistet sind.
- **Vertraulichkeit (security)**
  - betrifft Datenschutz, Zugangssicherheit.

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Begriffsbildung

- Zuverlässigkeit ist durch **Zuverlässigkeitskenngrößen** zu quantifizieren:
  - Beispiele: Verfügbarkeit, Überlebenswahrscheinlichkeit, …

- **Anforderung des Benutzers**
  - Bei Erneuerung, Erweiterung oder Wechsel des Systems sollen die Auswirkungen der Änderungen auf die Anwendungen nicht nennenswert wahrnehmbar sein.
  - **Wartungsfreundlichkeit**
    - System: Instandhaltung notwendig?
    - Komponenten: Ersatz?
    - Datenbestände: langfristig lesbar?

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Begriffsbildung

- **Ausfall** durch
  - Hardwarekomponenten
  - Software (Programmfehler)
  - Menschliche Eingriffe

- **Sicherheitsrelevante Anwendungen**
  - erfordern hohe **Verfügbarkeit**

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Begriffsbildung

- **Nutzungsdauer** eines Rechners
  - Mindestens 5 Jahre oder 40000 h, Dauerbetrieb notwendig?
  - Sehr kleine Ausfallraten der Komponenten ($< 10^{-9}h^{-1}$)
  - Probleme: Nachweisbarkeit, Testmöglichkeiten

- **Beispiel: Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Fehlers**
  - Bei einem Prozessor treten nicht behebbare Fehler einmal alle fünf Jahre auf (im Mittel)
  - Es sind eine Million Prozessoren im Mittel jedes Jahr im Einsatz
  - Daraus folgt: Jedes Jahr wird erwartet, dass 1/5 der Prozessoren ausfallen
  - Mehr als 500 nicht behebbare Fehler treten im Mittel jeden Tag auf
    - Katastrophale Konsequenzen für einen Hersteller
  - Eine Fehlerrate von einem Fehler alle fünf Jahre ist nicht akzeptabel, obwohl es für einen Benutzer akzeptabel erscheint

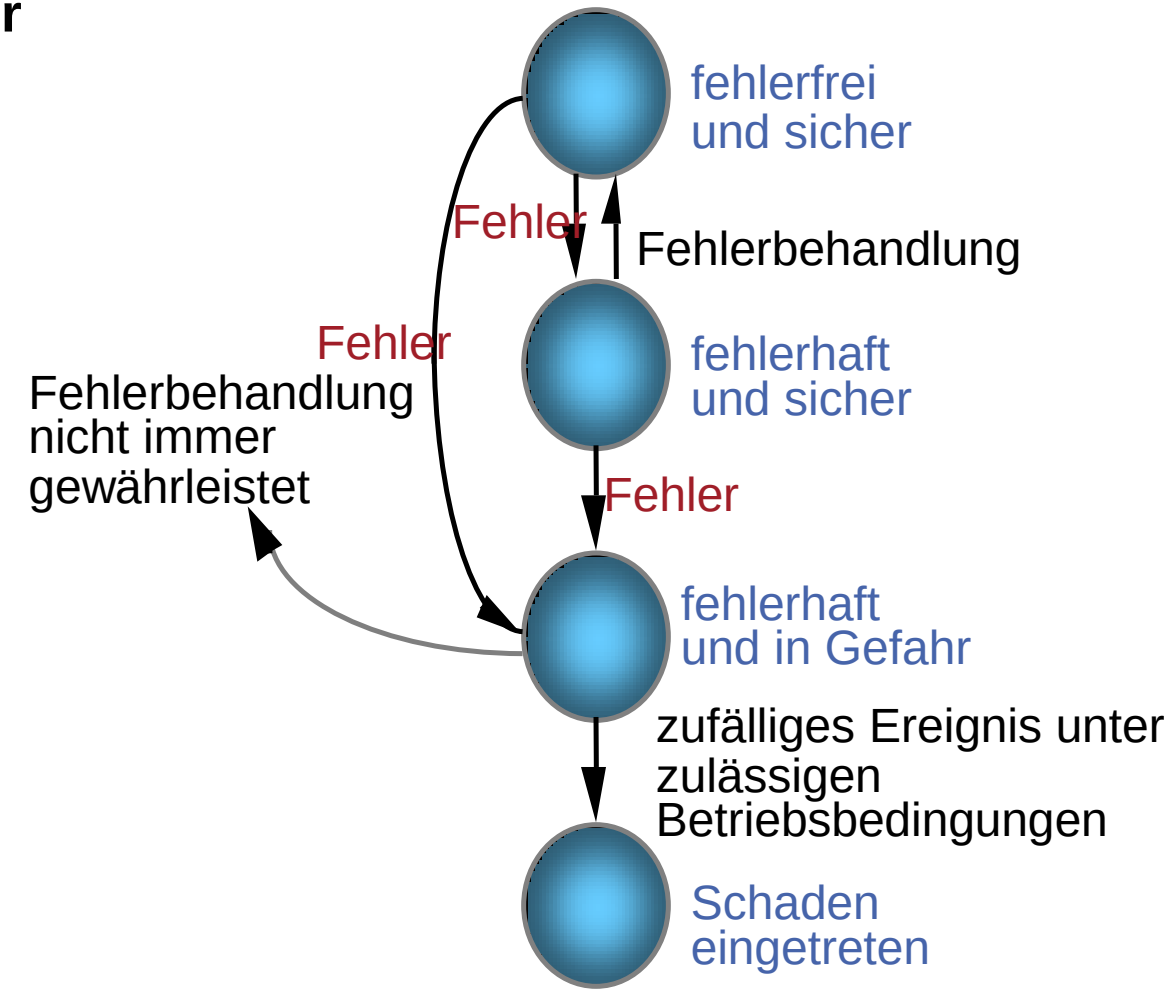
Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Fragen:

- Wie zuverlässig sind heutige Rechensysteme?
- Nutzen redundante, also fehlertolerante Strukturen zur Verbesserung der Zuverlässigkeit?
- Welche Verbesserung der Zuverlässigkeit lässt sich durch derartige Fehlertoleranzmaßnahmen überhaupt erreichen?

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Fehler



Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Fehler:

- **Funktionsausfälle**
  - Unzulässige bzw. aussetzende Funktion einer Komponente
- **Fehlzustände** (unzulässiger Zustand) einzelner Komponenten des Rechensystems oder Störungen
  - Sind verantwortlich für den Ausfall
  - Werden durch verschiedenste Fehlerursachen erzeugt
- **Wirkungskette**:
  - **Fehler → Fehlzustand → Ausfall**
  - Fehlerausbreitung verhindern!
- **Ziel der Fehlertoleranz**:
  - Tolerierung der Fehlzustände von Teilsystemen (Komponenten)
  - Erhöhung der Zuverlässigkeit
  - Behebung der Fehlzustände vor dem Ausfall des Systems

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Fehler:

- **Ursachen**
  - **Fehler beim Entwurf**
    - Führen dazu, dass ein von vornherein fehlerhaftes System konzipiert wird
      - Spezifikationsfehler
      - Implementierungsfehler
      - Dokumentationsfehler
  - **Herstellungsfehler**
    - Verhindern, dass aus einem korrekten Entwurf ein fehlerfreies Produkt entsteht

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Fehler:

- **Ursachen**
  - **Betriebsfehler**
    - Erzeugen während der Nutzungsphase eines Rechensystems einen fehlerhaften Zustand in einem vormals fehlerfreien System
    - **Störungsbedingte Fehler**
      - Störungen mechanischer, elektrischer, magnetischer, elektromagnetischer oder thermischer Art sind auf äußere Einflüsse zurückzuführen, denen keine Ursachen im Rechensystem selbst zugrunde liegt
    - **Verschleißfehler**
      - Treten mit zunehmender Betriebsdauer in der HW auf
    - **Zufällige physikalische Fehler**
    - **Bedienungsfehler**
      - Bewusste oder unbewusste Fehleingaben des Benutzers
    - **Wartungsfehler**

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Fehler:

- **Fehlerentstehungsort**
  - **Hardwarefehler**
    - Umfassen alle Entwurfs-, Herstellungs- und Bedienfehler
  - **Softwarefehler**
    - Umfassen alle Fehler, die in Programmteilen entstehen

- **Fehlerdauer**
  - **Permanente Fehler**
    - bestehen ab ihrem Auftreten so lange ununterbrochen auf, bis geeignete Reparatur- oder Fehlertoleranzmaßnahmen ergriffen werden
  - **Temporäre Fehler**
    - Treten nur vorübergehend auf
    - Entstehen eventuell mehrmals spontan und verschwinden wieder

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

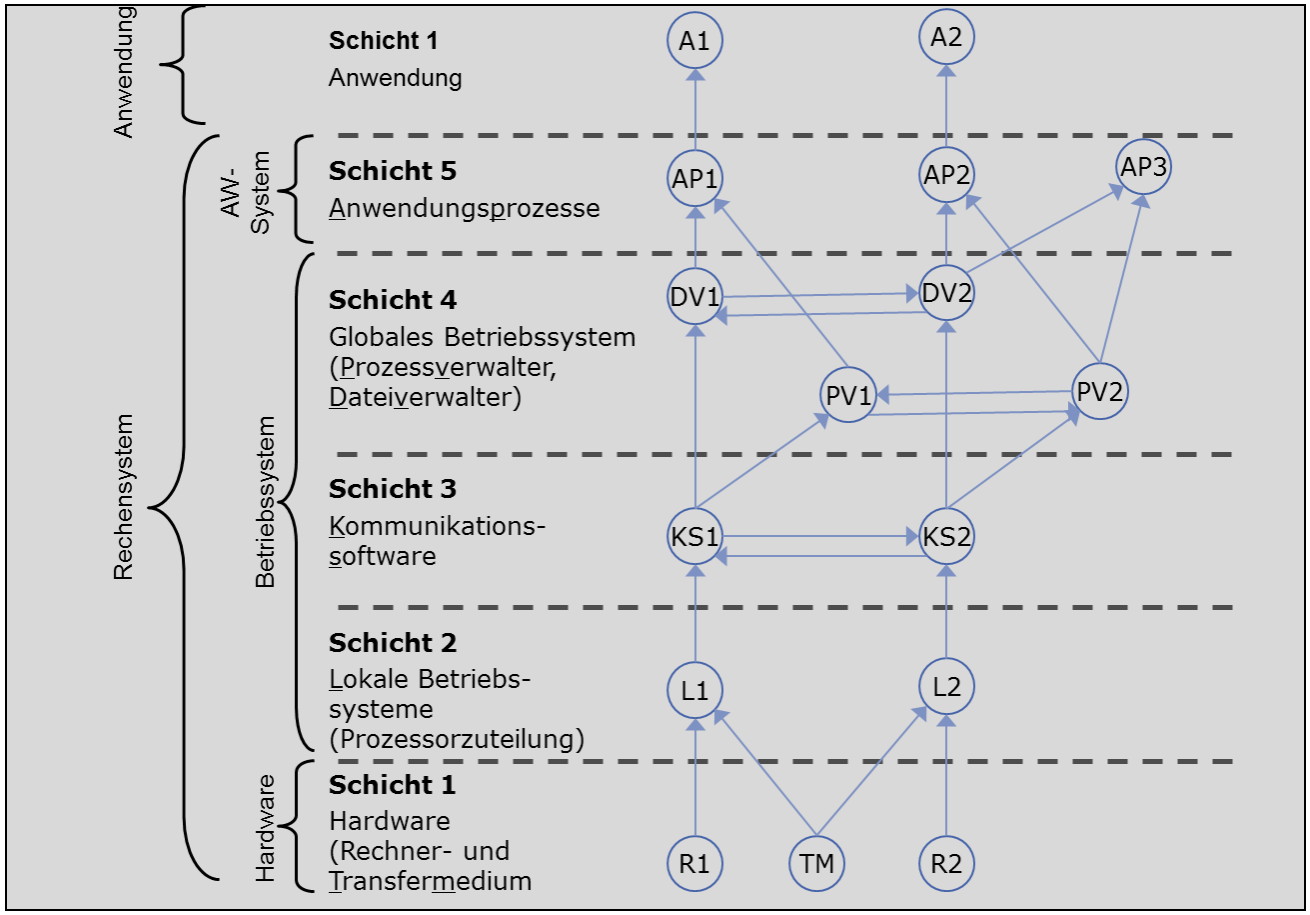
Struktur-Funktions-Modell

- Definition:
  - Das **Struktur-Funktions-Modell** ist ein gerichteter Graph, dessen Knoten die Komponenten und dessen Kanten die Funktionen eines Systems repräsentieren. Eine gerichtete Kante von der Komponente K_i zur Komponente K_j bedeutet, dass K_i eine Funktion erbringt, die von K_j benutzt wird.
  - Eine **Komponentenmenge** heißt **System**, wenn die nach außen erbrachten Funktionen in einer äußeren Spezifikation festgelegt sind. Ein System, das Teilmenge eines anderen ist, heißt **Subsystem**.
  - **Schichtenmodell**:
    - Die Komponenten werden in disjunkte Schichten partitioniert, für die es eine Totalordnung gibt. Funktionszuordnungen sind nur von niedrigeren an höhere Schichten (eine Halbordnung) und innerhalb von Schichten möglich.

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Struktur-Funktions-Modell

- **Schichtenmodell** eines 2-Rechensystems



Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Definitionen:

- Ein **Fehlermodell** beschreibt die möglichen Fehlzustände eines Systems, beispielsweise durch Angabe der Komponentenmengen, die zugleich von einer Fehlerursache betroffen sein können und durch Angabe des möglichen fehlerhaften Verhaltens dieser Komponenten.
- **Binäres Fehlermodell**:
  - Binäre **Fehlerzustandsfunktion Z** gibt für jede Komponente und das System an, ob sie fehlerfrei sind (wahr = kein Fehler, falsch = Fehler):

$$Z : (S \cup \{S\}) \rightarrow \{wahr, falsch\}$$

  - Ein System, das nur dann fehlerfrei arbeitet, wenn es seit der Inbetriebnahme fehlerfrei war, erfüllt:

$$Z(S,t) = \bigwedge_{t_0 \leq t} Z(S,t_0)$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Binäres Fehlermodell:

- **Nichtredundantes System**
  - Ein System, das nur dann fehlerfrei ist, wenn alle seine Komponenten fehlerfrei sind, wird charakterisiert durch

$$Z(S) = Z(K_1) \wedge \ldots \wedge Z(K_n)$$

- **Systemfunktion** $f(K_1, \ldots, K_n)$
  - gibt an, wie sich die Funktion des Systems aus den Funktionen der einzelnen Komponenten ableitet.
  - Systemfunktion für ein nichtredundantes System

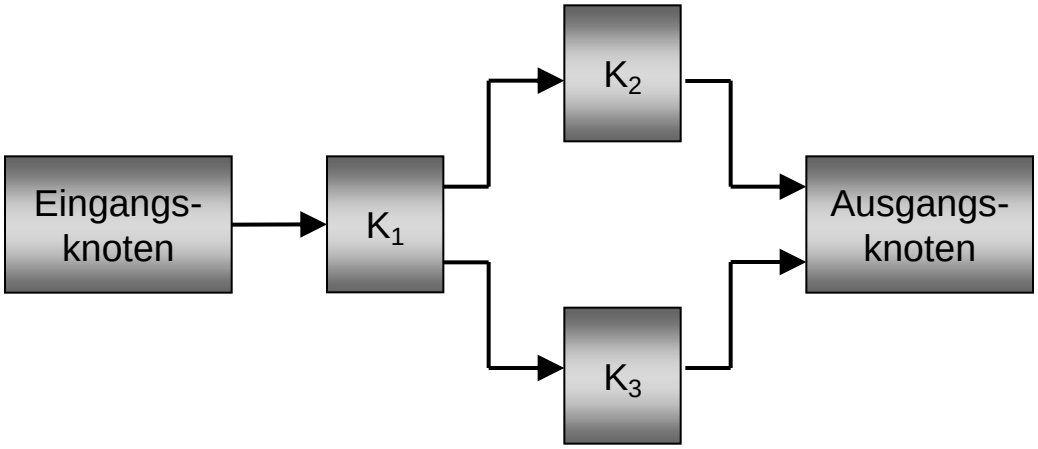
$$S = K_1 \wedge \ \ldots \ \ \wedge K_n$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Binäres Fehlermodell:

- **Zuverlässigkeitsblockdiagramm**
  - Die Systemfunktion lässt sich grafisch durch ein Zuverlässigkeitsblockdiagramm darstellen:
  - Gerichteter Graph mit einem Eingangs- und einem Ausgangsknoten
  - Beispiel für Systemfunktion

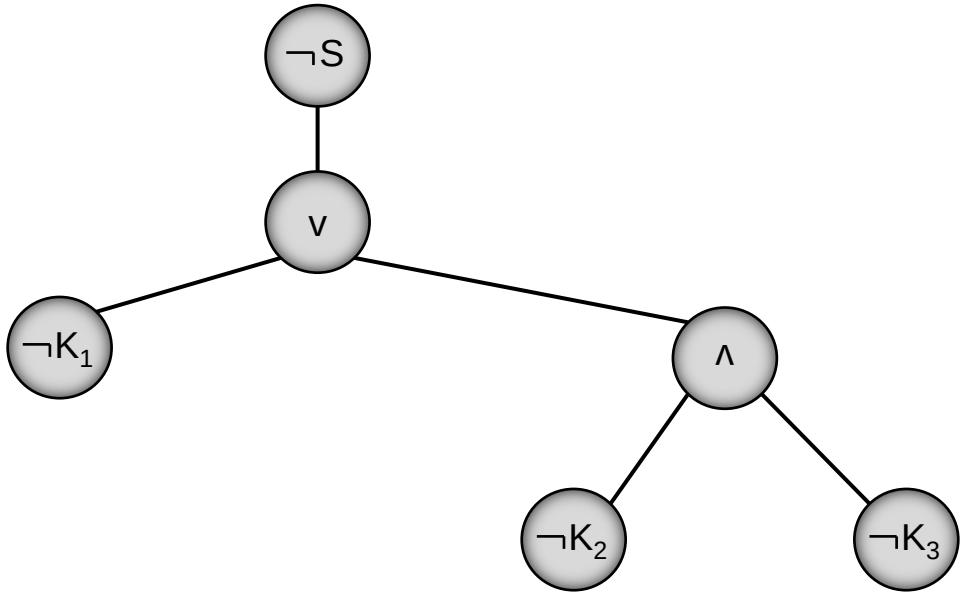
$$S = K_1 \wedge (K_2 \vee K_3)$$
$$Z(S) = Z(K_1) \wedge (Z(K_2) \vee Z(K_3))$$



Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Binäres Fehlermodell:

- **Fehlerbaum**
  - Strukturbaum der Negation der Systemfunktion
  - Stellt graphisch dar, wie sich Fehler des Systems auf Fehler der Komponenten zurückführen lassen
  - Beispiel: **Fehlerbaum** für $S = K_1 \wedge (K_2 \vee K_3)$ d. h. $\neg S = \neg K_1 \vee (\neg K_2 \wedge \neg K_3)$



Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Binäres Fehlermodell:

- **Fehlerbereich B:**
  - Ein **Fehlerbereich** B $\subset$ S ist eine Menge von Komponenten, die zugleich fehlerhaft sein können, ohne dass das System S insgesamt fehlerhaft wird.
  - D. h.: aus $\forall K \in S - B : Z(K) =$ wahr
    folgt: $Z(S) =$ wahr
  - Beispiel: $S = K_1 \wedge (K_2 \vee K_3) \rightarrow B_1 = \{K_2\}$ und $B_2 = \{K_3\}$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

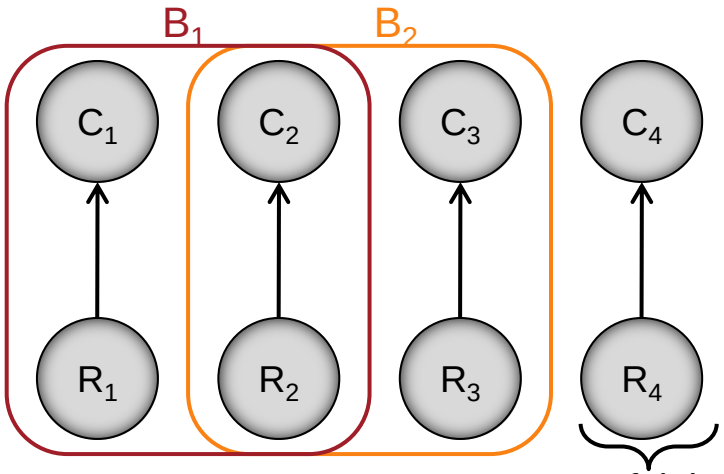
Binäres Fehlermodell:

- **Fehlerbereich B:**
  - **Einzelfehlerbereich:**
    - Wenn für ein System eine Menge von Fehlerbereichen Γ definiert ist, so bezeichnen wir eine Menge von Komponenten, die genau den gleichen Fehlerbereichen angehören, als Einzelfehlerbereich.
  - **Perfektionskern**
    - das Komplement der Vereinigung aller Fehlerbereiche
  - Es wird von den einzelnen Komponenten dieser Bereiche abstrahiert. Dadurch können sich Systemmodelle erheblich vereinfachen.

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Binäres Fehlermodell:

- **Fehlerbereich B:**
  - Beispiel: Für ein System S = {R_1,R_2,R_3,R_4,C_1,C_2,C_3,C_4} könnte die Fehlerbereichsannahme wie folgt lauten:
    - Γ = {B_1, B_2
    - Fehlerbereiche B_1 = {R_1,R_2,C_1,C_2} und B_2 = {R_2,R_3,C_2,C_3}
    - Einzelfehlerbereiche E_1 = {R_1,C_1}, E_2 = {R_2,C_2} und E_3 = {R_3,C_3}
    - Perfektionskern P_1 = {R_4,C_4}



Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Ausfallverhalten

- Steht das mögliche Ausfallverhalten bestimmter Komponenten eines Rechensystems im Vordergrund der Betrachtung, dann ist das eingeführte binäre Fehlermodell zu allgemein
- Es treten nur bestimmte Fehlfunktionen auf.

- Die aus bestimmten Fehlfunktionsannahmen hervorgehenden Einschränkungen des fehlerhaften Verhaltens können den Redundanzaufwand für ein Fehlertoleranzverfahren teilweise erheblich reduzieren.

- Um zu erreichen , dass auf einzelne Komponenten nur bestimmte Fehlfunktionsannahmen zutreffen, kann es notwendig sein, die Komponenten selbst fehlertolerant zu gestalten.

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Ausfallverhalten

- **Teilausfall**: Von einer fehlerhaften Komponente fallen eine oder mehrere, aber nicht alle Funktionen aus.
- **Unterlassungsausfall**: Eine fehlerhafte Komponente gibt eine Zeit lang keine Ergebnisse aus. Wenn jedoch ein Ergebnis ausgegeben wird, dann ist dieses korrekt.
- **Anhalteausfall**: Eine fehlerhafte Komponente gibt nie mehr ein Ergebnis aus.
- **Haftausfall**: Eine fehlerhafte Komponente gibt ständig den gleichen Ergebniswert aus.
- **Binärstellenausfall**: Ein Fehler verfälscht eine oder mehrere Binärstellen des Ergebnisses.

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Ausfallverhalten

- Systeme, die nur eine bestimmte Art von Ausfallverhalten aufweisen
  - **Fail-stop-System**:
    - Ein System, dessen Ausfälle nur *Anhalteausfälle* sind
  - **Fail-silent-System**:
    - Ein System, dessen Ausfälle nur *Unterlassungsausfälle* sind
  - **Fail-safe-System**:
    - Ein System, dessen Ausfälle nur *unkritische Ausfälle* sind

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Ausfallverhalten

- Der Ausfall einer ursächlich fehlerhaften Komponente K kann auch die Fehlerursache für Fehler in anderen Komponenten darstellen, wenn diese Funktionen auf K zugreifen: **Folgefehler**

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Ausfallverhalten

- **Maßnahmen der Fehlereingrenzung**
  - **Vertikale Fehlereingrenzung von höheren auf niedrigere Schichten**
    - Niedrigere Schichten prüfen die Funktionsaufrufe vor ihrer Ausführung
    - Beispiel: jeder unzulässige Befehlscode führt zu einer Fehlermeldung.
  - **Vertikale Fehlereingrenzung von der Hardware auf höhere Schichten**
    - Beispiel: Fehlerkorrekturcode im Arbeitsspeicher
  - **Vertikale Fehlereingrenzung von niedrigeren auf höhere Software-Schichten**
    - Durchführen von Plausibilitäts- und Konsistenzprüfungen der Ergebniswerte in höheren Schichten.
    - Es können viele, aber nicht alle Fehler erkannt werden
  - **Horizontale Fehlereingrenzung in lokalen Schichten:**
    - **z.B. (räumliche, elektrische, thermische, ...) Isolierung der Knoten.**
  - **Horizontale Fehlereingrenzung in globalen Schichten:**
    - Hauptproblem der Fehlereingrenzung
    - erfordert mitunter aufwendige Fehlertoleranzverfahren.

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Fehlertoleranzanforderungen

- Hohe **Überlebenswahrscheinlichkeit**
  - Beispielsweise zwecks Erfolg bei einer kurzzeitige Mission (z.B. 10-stündiger Flug)
- Hohe **mittlere Lebensdauer**
  - z.B. bei begrenzten Reparaturmöglichkeiten in unzugänglichen Rechensystemen
- Hohe **Verfügbarkeit**
  - z.B. im interaktiven Rechenzentrums- oder Nutzerbetrieb
- Hohe **Sicherheitswahrscheinlichkeit**
  - Schutz von Menschen, Maschinen, Daten
- Hohe **Sicherheitsdauer**

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Fehlertoleranzanforderungen

- **Vorgehensweise zur Erfüllung der Anforderungen**
  - **Fehlervermeidung**
    - Perfektionierung, Verwendung von zuverlässigen Komponenten, sorgfältiger Entwurf
  - **Fehlertoleranz**
    - Erfordert Redundanz und damit Zusatzaufwand

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Fehlertoleranzverfahren

- **Gesichtspunkte bei der Konstruktion**
  - Ableiten einer **Fehlervorgabe**
    - aus den angenommenen Fehlerraten der Komponenten und den aus den Zuverlässigkeitsanforderungen an das Gesamtsystem
    - Fehlervorgabe besteht aus **Fehlermodell** und der **Menge der zu tolerierenden Fehler**
  - **Menge der zu tolerierenden Fehler**
    - gibt an, welche der im Fehlermodell vorgesehenen Fehler zu tolerieren sind.
    - Häufig wird die Menge der zu tolerierenden Fehler bezüglich einer ***Fehlerbereichsannahme*** formuliert;
      - in diesem Fall ist festzulegen, wie viele ***Einzelfehlerbereiche*** gleichzeitig fehlerhaft werden können und
      - welche ***Fehlfunktionen*** zu behandeln sind.

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Fehlertoleranzverfahren

- **Gesichtspunkte bei der Konstruktion**
  - Zur Behandlung von mehreren nacheinander auftretenden Fehlern muss jeweils ein Zeitintervall gegeben sein, in dem keine zusätzlichen Fehler auftreten, bevor die Fehlerbehandlung abgeschlossen ist
  - **Zeitredundanz**
    - Zeitintervall in dem keine weiteren Fehler auftreten, bevor die Fehlerbehandlung abgeschlossen ist
  - **Fehlerbehandlungsdauer**
    - Zeit, die das Fehlerbehandlungsverfahren benötigt, um den Fehler zu behandeln
    - Fehlerbehandlungsdauer muss kleiner als die Zeitredundanz sein

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Fehlertoleranzverfahren

- **Zusätzliche Anforderungen**
  - Nachweis der Fehlertoleranzfähigkeit
    - Verifikation, Validierung, Durchführung einer Anfälligkeitsanalyse
  - Geringer Betriebsmittelbedarf (geringe Kosten)
  - Schnelle Ausführung von Fehlertoleranzverfahren (Leistung)
  - Unabhängigkeit von der Anwendungssoftware (Transparenz)
  - Unabhängigkeit vom Rechensystem

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Zuverlässigkeit, Sicherheit einer Rechensystems**
  - Quantifizierbar mittels stochastischer Modelle
  - Man betrachtet die kontinuierliche Variable Zeit zwischen dem Zeitpunkt, ab dem die Zuverlässigkeitsbetrachtung beginnen soll (Zeitpunkt Null), bis zum Auftreten eines betrachteten Effekts
  - Nichtnegative Zufallsvariablen:
    - **Lebensdauer L** – besitzt die **Dichte $f_L(t)$**
    - **Fehlerbehandlungsdauer B** – besitzt die **Dichte $f_B(t)$**
    - **Sicherheitsdauer D** – besitzt die **Dichte $f_D(t)$**
  - Korrespondierende **Verteilungsfunktionen**

$$F_x(t) := \int_0^t f_x(s)ds \quad \text{mit x = L, B und D}$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Fehlerwahrscheinlichkeit $F_L(t)$**
  - Bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass ein zu Beginn fehlerfreies System im Zeitintervall [0,t] fehlerhaft wird

$$F_L(t) = \frac{N_f(t)}{N}$$

$N_f(t)$: Anzahl der Komponenten, die bis zum Zeitpunkt t fehlerhaft sind

N: Gesamtzahl der Komponenten

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Überlebenswahrscheinlichkeit (component reliability) R(t)**
  - Gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zu Beginn (also zum Zeitpunkt t=0) fehlerfreies System bis zum Zeitpunkt t ununterbrochen fehlerfrei bleibt

$$R(t) = \frac{N_s(t)}{N}$$

$N_s(t)$: Anzahl der Komponenten, die bis zum Zeitpunkt t überleben

N: Gesamtzahl der Komponenten

$$N_f(t) = N - Ns(t)$$

$$R(t) = 1 - FL(t)$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Fehlerwahrscheinlichkeit $F_L(t)$**
  - Verteilungsfunktion der nichtnegativen Zufallsvariablen $F_L(t)$
  - Dichte $f_L(t)$ ist gegeben durch die Ableitung von $F_L(t)$

$$f_L(t) = \frac{d}{dt} F_L(t) = -\frac{d}{dt} \mathrm{R(t)} = -\frac{1}{N} \times \frac{d}{dx} N_s(t)$$

  - Es gilt für die Verteilungsfunktionen nichtnegativer Zufallsvariablen, dass diese in t monoton wachsen und es gilt:
    - $\mathrm{F_L(t)} = 0$ und $\lim_{n \to \infty} \mathrm{F_L(t)} = 1$
    - $\mathrm{R(0)} = 1$ und $\lim_{n \to \infty} \mathrm{R(t)} = 0$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

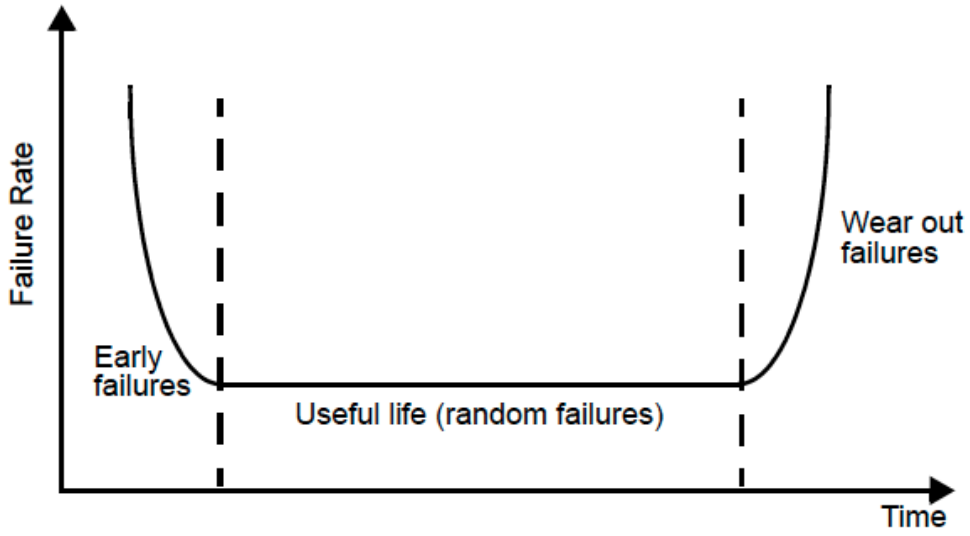
- **Ausfallrate z(t)**
  - Die Ausfallrate bezeichnet den Anteil der in einer Zeiteinheit ausfallenden Komponenten bezogen auf den Anteil der noch fehlerfreien Komponenten
  - Die Gesamtzahl der zu erwartenden ausgefallenen Komponenten zum Zeitpunkt t ist: $f_L(t) \times N$
  - Eine Komponente kann zum Zeitpunkt t nur dann ausfallen, wenn sie bis dahin überlebt hat. Zum Zeitpunkt t verbleiben dann $N_s(t) = R(t) \times N$.
  - **Ausfallrate** ist dann:

$$z(t) = \frac{f_L(t)}{R(t)} = \frac{1}{R(t)} \times \frac{d}{dt} F_L(t) = -\frac{1}{R(t)} \times \frac{d}{dt} R(t)$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Ausfallrate z(t)**
  - Badewannenkurve: Ausfallrate über die Lebenszeit eines Systems



Quelle: M. Dubois, M. Annavaram, P. Stenström:
Parallel Computer Organization and Design.
Cambridge University Press, 2012

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Fehlerwahrscheinlichkeit $F_L(t)$:**
  - Ist nur die Ausfallrate bekannt, so ergibt sich die Fehlerwahrscheinlichkeit aus der Anfangswertaufgabe

$$\frac{d}{dt}F_L(t) = fL(t) = z(t) \times R(t) = z(t) \times (1 - FL(t))$$

    mit der Anfangsbedingung $F_L(0) = 0$

  - Die Anfangswertaufgabe hat die Lösung:

$$F_L(t) = 1 - e^{-\int_0^t z(s)ds}$$

  - Bei einer konstanten Ausfallrate $z(t) = \lambda$ ist die Fehlerwahrscheinlichkeit folglich exponentialverteilt mit Parameter λ

$$F_L(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Verfügbarkeit V:**
  - Die Verfügbarkeit bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, ein System zu einem beliebigen Zeitpunkt fehlerfrei anzutreffen.
  - Es interessiert der zeitliche Anteil der Benutzbarkeit des Systems an der Summe der Erwartungswerte von Lebensdauer L und Behandlungsdauer B, wenn während B das System repariert und wieder funktionsfähig wird.
  - Es gilt:

$$v := \frac{E(L)}{E(L) + E(B)}$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Sicherheit einer Rechensystems**
  - Geht man Ausfällen aus, die die Sicherheit beeinträchtigen, dann ergeben sich analog zu den bisher betrachteten Größen solche mit Sicherheitsrelevanz
  - **Gefährdungswahrscheinlichkeit $F_D(t)$**
    - Wahrscheinlichkeit, dass ein zu Beginn sicheres System im Zeitintervall [0,t] in einen gefährlichen Zustand gerät
  - **Sicherheitswahrscheinlichkeit $S(t):=1- F_D(t)$**
    - Wahrscheinlichkeit, dass ein zu Beginn sicheres System bis zum Zeitpunkt t ununterbrochen in einem sicheren Zustand bleibt
  - **Mittlere Sicherheitsdauer E(D)**

$$E(D) = \int_0^\infty t \cdot f_D(t)dt = \int_0^\infty S(t)dt$$

    - Erwartungswert der Zeitdauer, bis ein gefährlicher Zustand auftritt

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Funktionswahrscheinlichkeit φ**
  - Da die Zuverlässigkeitsbewertung für die Überlebenswahrscheinlichkeit R und die Verfügbarkeit V einer Komponente bzw. eines Systems analog erfolgt, führen wir für beide Größen den Oberbegriff Funktionswahrscheinlichkeit ein.
  - Ausgehend von gegebenen Funktionswahrscheinlichkeiten $\varphi(K_1)$, …, $\varphi(K_n)$ der Komponenten ist die Funktionswahrscheinlichkeit $\varphi(S)$ des Systems S zu bestimmen. Diese muss alle möglichen Kombinationen von Werten der Fehlerzustandsfunktion aller Komponenten berücksichtigen
  - **Funktionswahrscheinlichkeit des Systems S = f(K_1, …, K_n)**

$$\varphi(S) = \sum_{(K_1,\ldots,K_n)\in f^{-1}(wahr)} \varphi(\wedge_{i=1}^{n} K_i)$$

    - wobei $K_i \in$ {wahr,falsch} den Fehlzustand der jeweiligen Komponente angibt und f^{-1}(wahr) die Menge der Kombinationen von Fehlzuständen der Komponenten des Systems S beschreibt, für die der Fehlerzustand „wahr“ ist

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Nichtfunktionswahrscheinlichkeit**

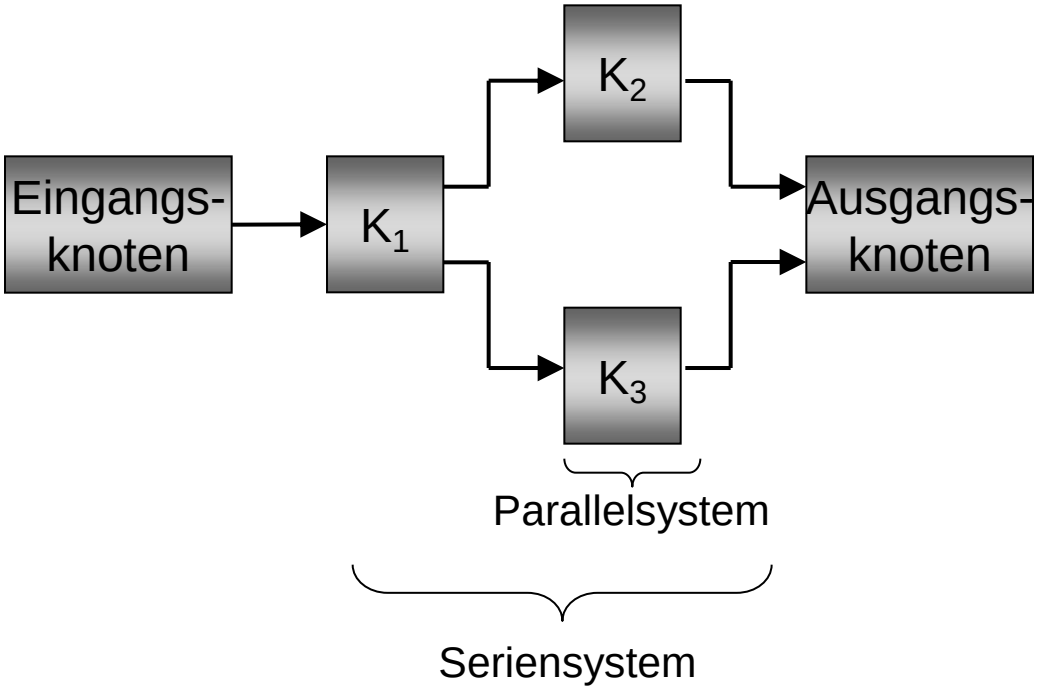
$$\varphi(\neg K) = 1 - \varphi(K)$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Funktionswahrscheinlichkeit für Seriensystem und Parallelsystem**
  - Zuverlässigkeitsdiagramm

$$S = K_1 \wedge (K_2 \vee K_3)$$



Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Funktionswahrscheinlichkeit**
  - **Seriensystem**

$$\varphi(\wedge_{K\in\Lambda}) = \prod_{K\in\Lambda} \varphi(K)$$

  - **Parallelsystem**

$$\varphi(\vee_{K\in\Lambda}) = \sum_{\varnothing\neq A\in\Lambda} (-1)^{1+\#A} \cdot \varphi(\wedge_{K\in A} K)$$

K steht für einzelne Komponenten und Λ für eine endliche Menge von Komponenten oder Systemfunktionen

  - **System** $S = K_1 \vee K_2$

$$\varphi(S) = \varphi(K_1 \vee K_2) = \varphi(K_1) + \varphi(K_2) - \varphi(K_1 \wedge K_2)$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

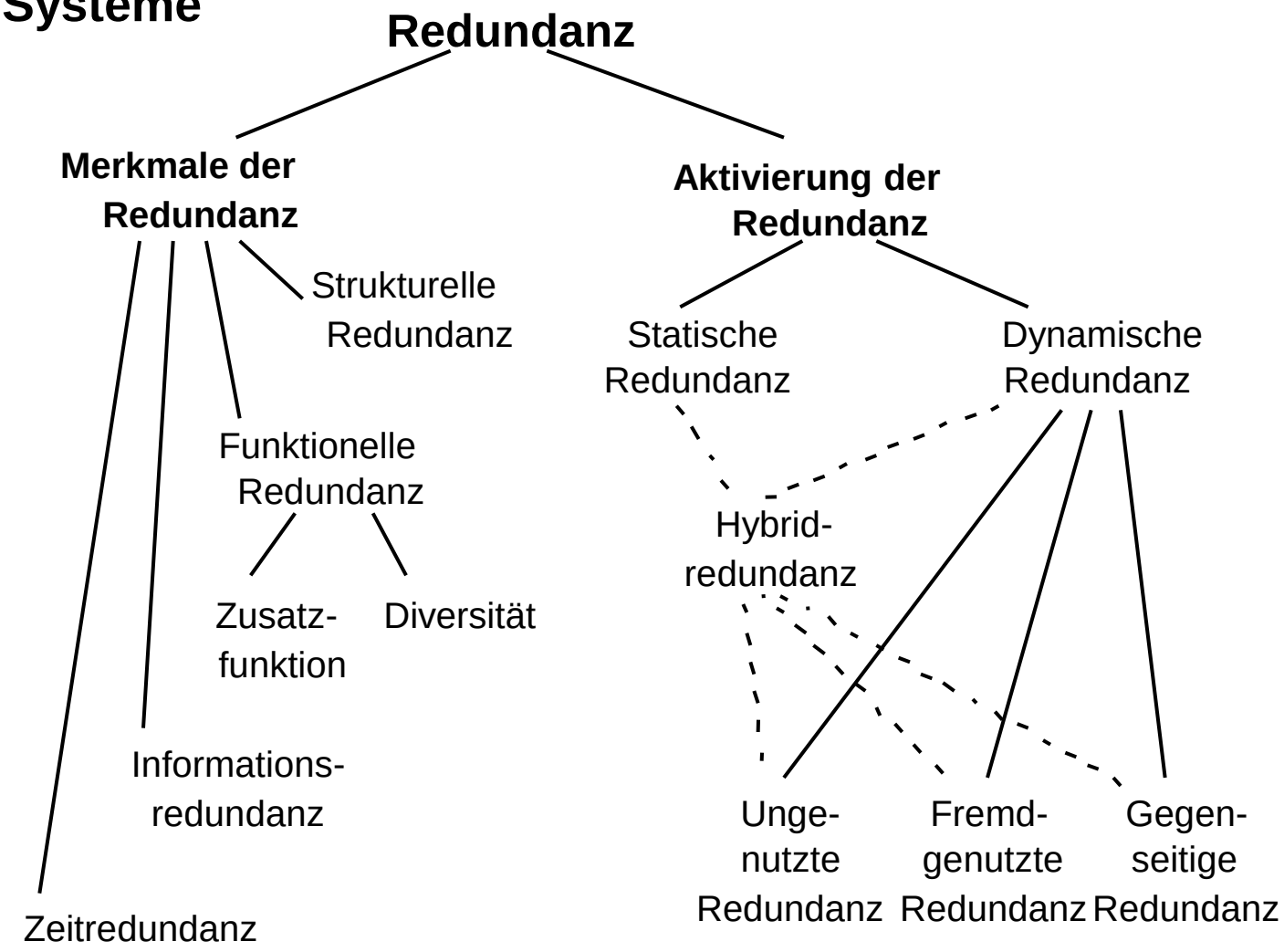
Zuverlässigkeitskenngrößen

- **Funktionswahrscheinlichkeit**
  - **Zuverlässigkeitsverbesserung**

$$\Phi_{S_1 \to S_2} = \frac{\varphi(\neg S_1)}{\varphi(\neg S_2)} = \frac{1-\varphi(S_1)}{1-\varphi(S_2)}$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

Redundante Systeme



Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

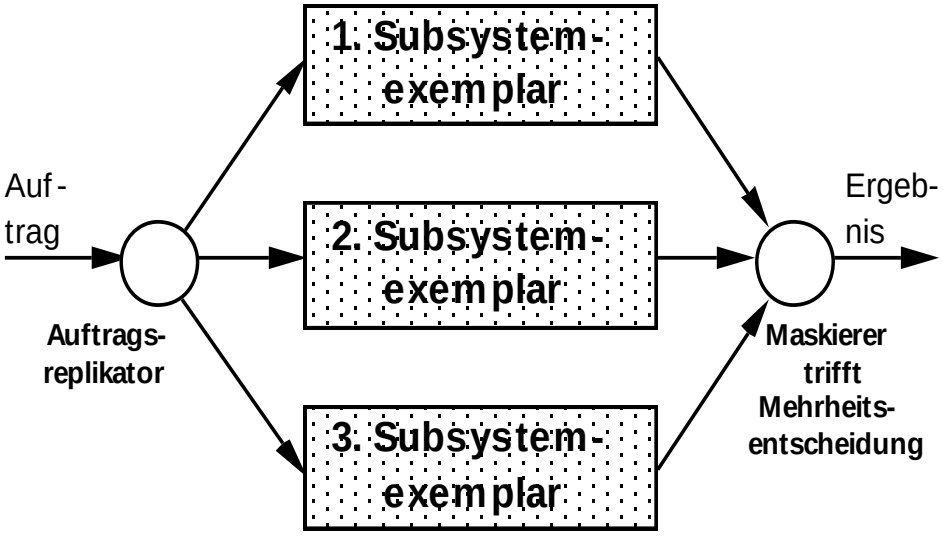
- **Redundanz**
- **Dynamische Redundanz (dynamic redundancy)**
  - bezeichnet das Vorhandensein von redundanten Mitteln, die erst nach Auftreten eines Fehlers aktiviert werden, um eine ausgefallene Nutzfunktion zu erbringen.
  - Typisch für dynamische strukturelle Redundanz ist die Unterscheidung in Primär- und Ersatzkomponenten (bzw. Sekundär- oder Reservekomponenten).
  - Grundstruktur eines dynamisch strukturell redundanten Systems

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

- **Redundanz**
- **Dynamische Redundanz (dynamic redundancy)**
  - Bevor Ersatzkomponenten aktiviert werden, lassen diese sich auf eine der folgenden Arten verwenden:
  - **Ungenutzte Redundanz**
    - Ersatzkomponenten führen keine sonstigen Funktionen aus und bleiben bis zur fehlerbedingten Aktivierung passiv.
  - **fremdgenutzte Redundanz:**
    - Ersatzkomponenten erbringen nur Funktionen, die nicht zum betreffenden Subsystem gehören und im Fehlerfall bei niedrigerer Priorisierung ggf. verdrängt werden.
  - **gegenseitige Redundanz:**
    - Ersatzkomponenten erbringen die von einer anderen Komponente zu unterstützenden Funktionen, die Komponenten stehen sich gegenseitig als Reserve zur Verfügung.
      Dies ermöglicht einen abgestuften Leistungsabfall (graceful degradation).

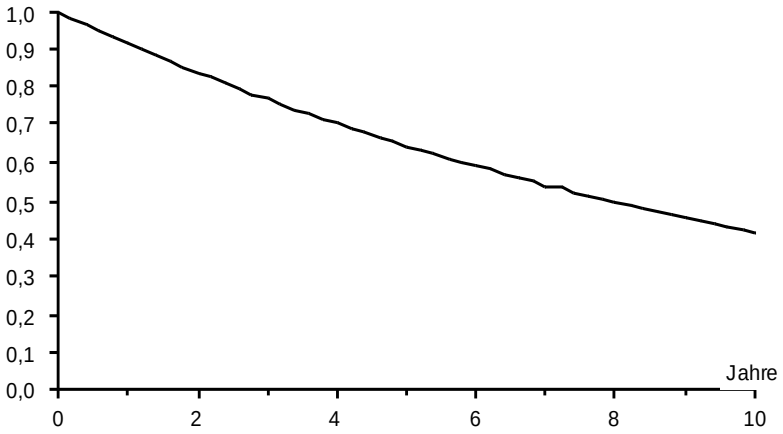
Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

- **Redundanz**
- **Statische Redundanz (static redundancy)**
  - bezeichnet das Vorhandensein von redundanten Mitteln, die während des gesamten Einsatzzeitraums die gleiche Nutzfunktion erbringen.
  - Beispiel der statischen strukturellen Redundanz: **n-von-m-System**
    - 2-von-3-System:



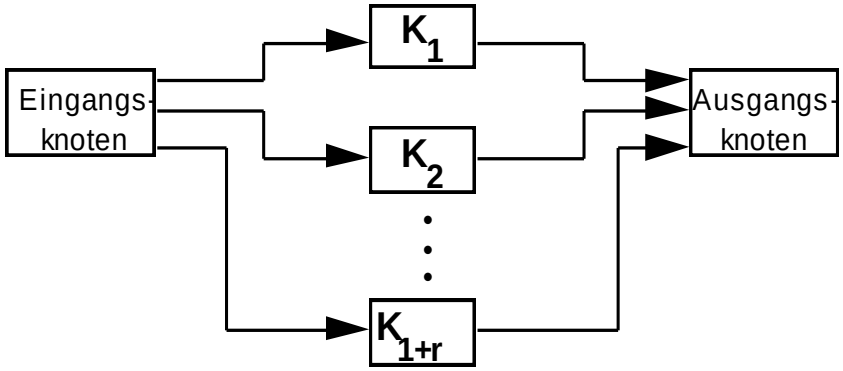
Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

- **Verbesserung der Zuverlässigkeit durch Redundanz**
  - Nichtredundantes Einfachsystem: S1=K1
  - Bei konstanter Ausfallrate beschreibt man die Zeitabhängigkeit der Funktionswahrscheinlichkeit φ (S_1, t) durch eine Exponentialverteilung
    - mit $z(t)=\lambda$, $\varphi(S_1, t) = e^{-\lambda \cdot t}$.
  - Beispiel:
    - Funktionswahrscheinlichkeit φ (S_1, t) mit $\lambda=10^{-5/h}$



Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

- **Verbesserung der Zuverlässigkeit durch Redundanz**
- Parallelsystem (Einfachsystem mit ungenutzter oder fremdgenutzter Redundanz)



Systemfunktion

$$S_{1+r} = K_1 \vee \ldots \vee K_{1+r}$$

Funktionswahrscheinlichkeit

$$\varphi(S_{1+r}, t) = 1 - \prod_{i=1}^{1+r} (1 - \varphi(K_i, t))$$

gleiche konstante Ausfallrate λ

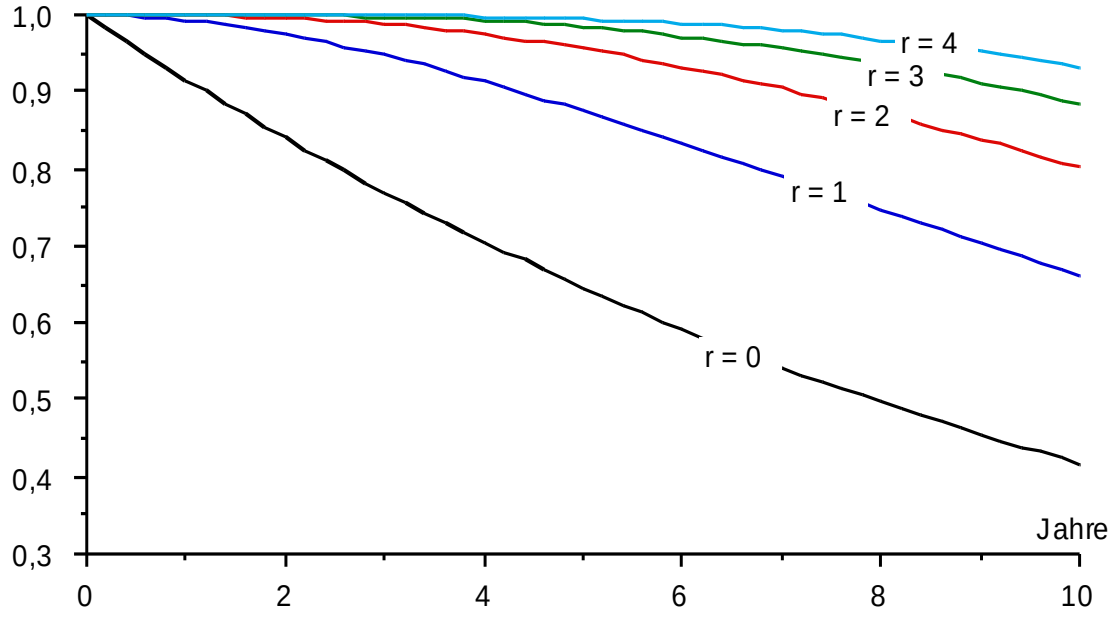
$$\varphi(S_{1+r}, t) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot t})^{1+r}$$

Zuverlässigkeitsverbesserung

$$\Phi_{S1 \to S1+r} = (1 - e^{-\lambda \cdot t})^{-r}.$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

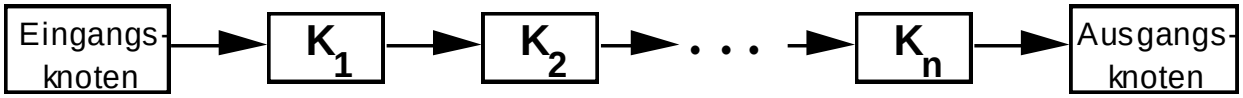
- **Verbesserung der Zuverlässigkeit durch Redundanz**
- Funktionswahrscheinlichkeit für Parallelsystem



Annahme einer Komponentenausfallrate von $\lambda = 10^{-5}/\mathrm{h}$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

- **Verbesserung der Zuverlässigkeit durch Redundanz**
- Seriensystem

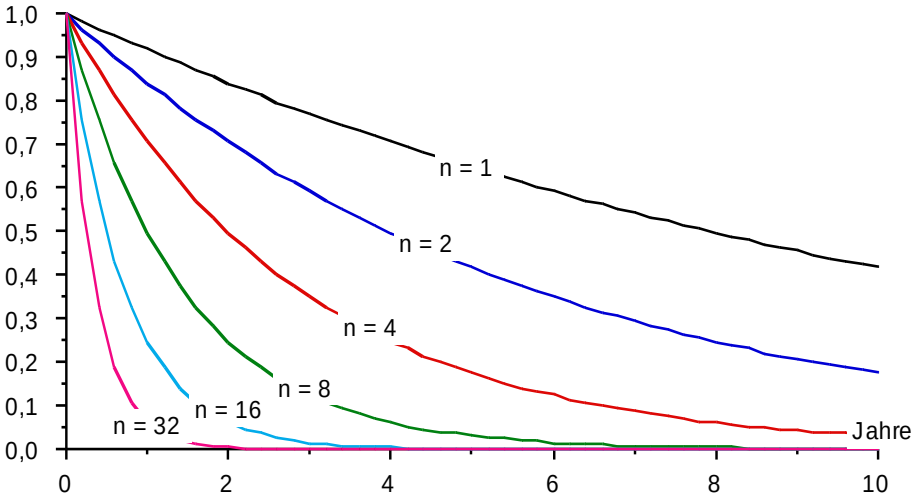


Seriensystem $S_n = K_1 \wedge \ldots \wedge K_n$

Zuverlässigkeit $\varphi(S_n, t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(K_i, t)$

Funktionswahrschein-lichkeit $\varphi(S_n, t)$

für $\lambda = 10^{-5}/h$



Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

- **Statisch redundantes System**
  - Ist die Fehlererfassung zu gering oder verbieten sich wiederholte Berechnungen wegen den geforderten maximalen Antwortzeiten, so kann statische Redundanz eingesetzt werden.
  - Dabei führen mehrere Komponenten die gleiche Berechnung aus, um anschließend die errechneten Ergebnisse zu vergleichen und ein mehrheitliches auszuwählen.
  - Bis zu f fehlerhafte Komponenten können überstimmt werden, wenn mindestens n=f+1 fehlerfreie, insgesamt also m=2·f+1 Komponenten vorhanden sind.

$$S_{m\ von\ m} = \bigvee_{1 \le i_1 < \ldots < i_n \le m} K_{i_1} \wedge \ldots \wedge K_{i_n}$$

Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz

- **Statisch redundantes System**